2012 集训队互测 电子对撞机(刘洪轩) 解题报告

天津市南开中学

刘洪轩

一、题目描述

N 个电子在数轴的运动，运动的速率恒定为 1，运动的范围是[0,L]，电子运动到范围边缘时会和边缘的墙相撞，相撞后会速率不变但反向运动。电子和电子相遇时也会相撞，相撞后同样两个电子速率均不变但反向运动。电子分为高能与低能电子，电子与电子相撞会产生能量，低能电子和低能电子对撞会产生 1 个单位的能量，低能电子和高能电子对撞会产生 4 个单位的能量，高能电子和高能电子对撞会产生 25 个单位的能量，电子和墙相撞不会产生能量。且数轴上有多个互相没有交集的接收区间，这些接收区间都是闭区间。电子与电子相撞与某个接收区间时，相撞产生的能量会被接收，若相撞位置不属于任何一个区间，能量则会丢失。先给出 0 时刻所有电子的位置和运动的方向（保证此时任意两个电子不处于同一位置），求出时间在[0,T]时所接收到的能量。

$2 <= N <= 1000000, 1 <= M <= 10, 2 <= L <= 100000000, 0 <= T <= 1000000000$

二、题目分析

这个问题看似只能模拟解决，但模拟处理的时间明显不能满足数据范围的要求。我们需要寻找一下这个题目的规律。

（1）电子在运动过程中，所以电子按位置排序，顺序不会改变。且每个电子仅仅能和与其相邻的电子相撞。

这个规律是我们要用到的规律里最简单好想的，不过现在还看不出它有什么用处。为使问题更明显，我们还需要分析出一些更有用的规律。

我们看到，电子处于不断碰撞的过程中，这使我们难以把握一个电子的位置。但是，如果我们忽略电子与电子的碰撞，令电子与电子相遇时互相穿过，我们就能较容易地处理电子的位置。所以我们这里设定一个对照过程，而题目中的过程称为原过程。

(*)我们建立一个对照过程，对照过程中的电子与电子相遇后不会相撞而会相互穿过。

然后我们容易得出下面的结论。

（2）某一时刻对照过程中某一位置有一个电子，原过程中同时刻同位置也会有一个电子。

（3）将原过程中的电子按初始位置排序（根据（1)，这个顺序在运动中不会改变)。之后在某一时刻将对照过程中的所有电子按位置排序，所得出的位置序列正好是这个时刻原过程中按顺序每一个电子的位置。

（4）某一时刻对照过程中某两个电子在某一位置相遇，原过程中同时刻同位置会有两个电子相撞。

这里面（2）根据电子与电子碰撞的规则观察，是明显成立的。而（3）（4）可以由（2）

得出。

之后我们试图量化表示电子的运动规律。我们先规定，对照过程中的运动状态，若 x 是其位置，电子向右运动，运动状态就是 x，向左运动，状态就是 2L-x，然后便有下面的结论。

（5）若对照过程中，某时刻电子运动状态为 a，经过 t 时间后，它的状态是(a+t) mod 2L。

（6）对照过程中，一个电子的运动以 2L 为周期，即经过 2L 的时间，这个电子运动状态不变。同样地，对照过程整体的运动也以 2L 为周期。

根据（3），我们确定了对照过程中某一时刻所以电子的运动状况，我们便能得出这一时刻原过程中所有电子的运动状况，之后我们就有了这个结论。

（7）原过程中的运动以 2L 为周期。

知道了这个结论，我们就只需求出[0,2L]的答案和[0,T mod 2L]的答案，便能计算出[0,T]的答案。

之后我们假设对照过程中的两个电子 a 和 b，它们的初状态分别为 Xa 和 Xb，我们试图推导出它们相遇的位置和时间，且相遇时电子 a 向左运动，电子 b 向右运动。

我们设这个位置为 Pa,b，时间为 Ta,b。所以它们相遇时电子 1 的运动状态为 2L-Pa,b，电子 2 的运动状态为 Pa,b。我们根据（5）得到下式。

Xa + Ta,b ≡ 2L-Pa,b (mod 2L)

Xb + Ta,b ≡ Pa,b (mod 2L)

两式子相减得

Xa-Xb ≡ 2L-2Pa,b (mod 2L)

Xa-Xb ≡ -2Pa,b (mod 2L)

2Pa,b ≡ Xb-Xa (mod 2L)

Pa,b ≡ (Xb-Xa) / 2 (mod L)

即

（8）Pa,b = (Xb – Xa)/2 mod L

然后继续推导 Ta,b

Xa + Ta,b ≡ 2L-Pa,b (mod 2L)

（9）Ta,b = (-Pa,b-Xa) mod 2L，这个相遇以 2L 为周期发生。

我们求出了这两个电子相遇的时间和位置，然后根据（4）同时同地原过程中应该有两个电子相撞，并且还可以判断出这个位置与时间是否满足条件。但是我们不知道相撞的具体是哪两个电子，也不知道相撞所产生的能量。

由于原过程中每个电子只能与相邻的电子相撞，我们把原过程中电子按位置排序后确定为第 0 个到第 N-1 个电子，我们定义碰撞事件 i 表示第 i-1 个电子与第 i 个电子相撞。明显碰撞事件的范围是 1 到 N-1。

然后我们把对照过程中所有的电子按初运动状态排序后，按这个顺序给出编号 0,1,…n-1，我们发现当 a 和 b 相遇且此时 a 向左 b 向右时，位于相遇点右侧的所以电子的编号应该在 b 之后 a 之前(模意义下)，左侧的所有电子在 a 之后 b 之前。左侧即在 a 之后 b 之前的电子的个数为(b-a-1) mod N 个，所以这次相遇对应的碰撞时间的编号是(b-a) mod N,即

（10）电子 a 向左，电子 b 向右时相遇对应的碰撞事件是(b-a) mod N。

确定了碰撞事件，我们就能确定这次碰撞所产生的能量。

然后，得出了上面这么多的结论，我们就可以有一个正确的算法了。上面已经提到，我们只需求出时间范围[0,2L]的答案和[0,T mod 2L]的答案。求这两个的方法相同，枚举对照过程中的电子 a 和 b，求出它们相遇的时间和位置，判断时间是否满足条件且位置是否在接收区间上，若均为是，求出对应的碰撞事件并得出碰撞所产生的能量然后加到答案上。

这个方法的时间复杂度为 $O(n^2m)$。只能通过一部分测试点。

然后我们对这个算法进行优化，我们仅仅枚举电子 a，然后对一个 a，满足时间限制的 b 和满足位置限制的 b 都应该是一个模意义下的区间，且这两个区间随 a 的变化单调向某一方向移动。a 从电子 1 到电子 N-1 再到 1 正好走满一个长度为 N 的周期时，观察（8）（9）就会发现，这个两个区间也会走过一个周期。这样我们就可以用总共 O(n)的时间均摊求出每一个 a 对应的满足位置条件的 b 的范围或者满足时间条件的 b 的范围。之后对于每一个 a，将上述这两个范围求交后得出一个既满足位置也满足时间的范围，再求出这个范围对应的碰撞事件的范围，令这个范围内的碰撞事件我们记录的发生的次数加 1。

对区间内所有的数加 1 可以用部分和的方法处理，即先初始化一个值均为 0 的数列，若一个区间都加 1，我们数列中区间左侧加 1，右侧减 1。然后我们所需的每一个数的值就是数列中从开头到这个数的位置所有的数字之和。我们进行过所有修改操作后，可以用 O(n)的时间求出每个数的值，即每个碰撞事件的发生次数，然后令发生次数乘上每次产生的能量再加起来即可。

总复杂度为 O(nm)。

三、总结

这道题在实现上只是最简单的均摊以及用部分和处理区间相加，仅仅是对模意义下的区间有些稍微不好处理而已。但是这道题的解题思路十分奇特，我们需要一个对照过程来帮助我们推导出所有的结论。去做这道题时也容易想到，“我们令电子相遇时不相撞而互相穿过会怎么样”，但是对照过程打乱了电子间的相对顺序和对应关系，令人以为无法得出（10）这样或类似的结论而放弃这一思路。同时推导也需要把原过程和对照过程相结合，人们往往想到了对照过程后思考时把原过程完全抛弃。能得出这道题的正确算法，尤其是在考场上得出十分的不易。