JZPFAR解题报告

南京师范大学附属中学　顾昱洲

Contents

1 题目大意

平面上有n个点。有m次询问，每次给定一个点(px, py)和一个整数k，询问n个点中距离该点第k大的点的标号。若有多个点距离该点相同，那么认为标号小的点距离较大。

50%的数据，n个点的坐标在某范围内随机分布。

100%的数据，$n \le 10^5$，$m \le 10^4, 1 \le k \le 20$，所有点的坐标满足绝对值$\le 10^9$，$n$个点中任意两点坐标不同，$m$个询问的点的坐标在某范围内随机分布。

2 50%的算法

首先，对于$k = 1$的情况，我们可以得到一个定理：

定理1. *求出给定的n个点的凸包H，离某个点P的最远点必然是H的某个顶点。*

证明 若不然，我们设最远点为S。由于S在H内，因此连接并延长PS，延长线必然与凸包的外轮廓相交。

若交点是凸包的一个顶点，那么这个顶点到P的距离比S大，矛盾；

否则，设交在某条边上，这条边的两个端点分别是A和B，交点为O。不妨假设$\angle POA \ge 90°$，那么根据正弦定理，必然有$|PA| > |PS|$，矛盾。

证毕。

类似的结论可以扩展到k远点。为了方便表述，我们定义p层凸包：

定义1 (p层凸包的递归定义)**.** *1层凸包为所有点的凸包。*
p层凸包为删去前$p-1$层凸包的所有顶点后，剩下的点的凸包。

那么，有定理：

定理2. *求出给定的n个点的前k层凸包$H_1, \ldots, H_k$，离某个点P的k远点必然是$H_1, \ldots, H_k$中的某个凸包的顶点。*

证明和定理1差不多，这里就不赘述了。

那么，我们暴力求出前k层的凸包，然后对于每个询问，对于前k层凸包上的每个点求出距离，然后暴力求第k大即可。

但是这里还存在一个问题。即前k层凸包上的点的总数。

注意到这里的关键条件：给定的n个点的坐标在某范围内随机分布。

对于1层凸包，我们有一个定理 [1](事实上，这篇论文证明的结论比这个定理要强得多)：

定理3. *在$\mathbb{R}^2$上随机n个点，那么这n个点的凸包上的点的个数的期望是$O(\sqrt{\ln n})$的。*

对于前p层凸包，我猜测可能会有类似的结论，不过可能会相当复杂。不过实际情况是，10^5个随机点的前20层凸包上总共有一千多个点。这是一个相当小的数。

因此我们暴力即可。

每次暴力求凸包时间复杂度$O(k_m n\log n + Lm)$，其中k_m为k可能达到的最大值，本题中为20，L为前k_m层凸包上点的个数。事实上，经过适当优化，复杂度可优化为$O(n\log n + k_m n + Lm)$。不过求前k层凸包在这里不是占用时间的主要矛盾。

这里还有两点需要注意：

1. 由于随机的性质，求前k_m远点，几乎所有情况下均只需求前10层凸包。这个性质可以大大减少时间常数。

2. 一个数列求k大值，C++选手可以使用STL中的nth_element，时间复杂度是线性的，可以在一定程度上减小编程复杂度。

3 100%的算法

考虑和求k远点相近的一个问题：求k近点。再将之降低难度，变为求最近点。这个问题该怎么做？

一个熟知的方法是求出给定的n个点的Voronoi图 [2]，然后进行点区域查询。时间复杂度是$O(n\log n + m\log n)$。这个方法是可以扩展到这里要解决的问题的，时间复杂度为$O(k_m n\log n + m\log n)$，不过这个方法对于OI来说编程复杂度过大，且常数不一定能够承受，因此这里不作介绍。

这里介绍一个更加简单的方法：使用二维k-d tree来解决这个问题。集训队员应当已经知道这些内容。不知道其为何物，或如何构造，或如何使用它来解决最近点问题，请参考 [3]。

使用二维k-d tree解决k远点，是求最近点的方法的自然拓展。我们只需要维护一个长度为k的列表，存储当前的$1\ldots k$远点。并且在访问一个结点的两个孩子时，优先访问可能使得结果变得更优的孩子。

一次询问的时间复杂度最坏显然是$O(kn)$的(考虑n个点都在一个圆上，而询问的点在圆心)，期望**可能**是$O(k\sqrt{n})$。实际测试的结果大致符合这个复杂度。但是我不会证明这个结论。注意这里使用了询问的点在某范围内随机这个关键条件。

由于不是占用时间的主要矛盾，我们可以暴力建二维k-d tree。

总的时间复杂度**可能**是$O(n\log^2 n + mk_m\sqrt{n})$。

参考文献

[1] Hueter, I., Limit Theorems for the Convex Hull of Random Points in Higher Dimensions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **351**, 4337-4363, 1999

[2] Voronoi, G., Nouvelles applications des paramétres continus á la théorie de formes quadratiques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **134**: 198 - 287, 1908

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/K-d_tree