

# Bomb 解题报告

杭州学军中学 李超

## 题目大意：

在平面上给定  $N(N \leq 100000)$  个点，要求选出三个点，它们两两之间的曼哈顿距离和的最大值和最小值。

## 解题思路：

先考虑只要选择两个点的情况，令  $X_{\max}$  表示两个点中  $X$  坐标较大的点的  $X$  坐标， $X_{\min}$  表示两个点中  $X$  坐标较小的点的  $X$  坐标， $Y_{\max}, Y_{\min}$  同理。则答案即为  $X_{\max} - X_{\min} + Y_{\max} - Y_{\min}$ 。我们先计算最大值。考虑最大值的分布，显然我们只要选出使  $X_{\max} + Y_{\max}, -X_{\min} - Y_{\min}, X_{\max} - Y_{\min}, -X_{\min} + Y_{\max}$  这四个表达式值最大的点暴力即可。然后计算最小值。若不考虑  $X_{\min} = X_{\max}$  或  $Y_{\min} = Y_{\max}$  这些极端情况，两个点的位置情况只有两种(左下，左上)，是对称的，我们只考虑其中的一种情况。以第一个点在第二个点左下方为例。则第一个点的坐标为  $(X_{\min}, Y_{\min})$ 。显然，我们要查找的是  $X > X_{\min}$  且  $Y > Y_{\min}$  且  $X + Y$  最小的点。我们可以按  $X$  轴从大到小枚举，保证  $X > X_{\min}$ ，按  $Y$  轴坐标维护一棵线段树，记录区间  $X + Y$  最小的值，在每个点处只要在线段树中查询  $[Y_{\min}, +\infty)$  中的  $X + Y$  最小值，更新答案，然后插入点  $(X_{\min}, Y_{\min})$  即可。时间复杂度  $O(N \log N)$ 。

接下来考虑三个点的情况。我们考虑三个点两两之间的曼哈顿距离和的实质。通过画图，我们容易发现，问题的实质是求能包含这三个点的最小矩形的周长，即  $2 * (X_{\max} - X_{\min} + Y_{\max} - Y_{\min})$ ，因此我们只要最大化和最小化  $X_{\max} - X_{\min} + Y_{\max} - Y_{\min}$  即可。考虑这四个未知量，显然，一个点最多确定一个  $X$  未知量和一个  $Y$  未知量，答案的组成可能有两种情况：

① 一个点确定了一个  $X$  和一个  $Y$ ，另外两个点分别确定了一个  $X$  和一个  $Y$ 。

② 一个点确定了一个  $X$  和一个  $Y$ ，另一个点同样确定了一个  $X$  和一个  $Y$ ，还有一个点什么都没有确定(但必须存在这个点)。

我们分别考虑这两种情况。先考虑最大值。显然，确定最大值的点一定在  $X_{\max} + Y_{\max}, -X_{\min} + Y_{\max}, -X_{\min} - Y_{\min}, X_{\max} - Y_{\min}, X_{\min}, X_{\max}, Y_{\min}, Y_{\max}$  最大的至多 8 个点中选择三个，因此只需选出能使这些值变得最大的点暴力即可。

然后考虑最小值。先考虑情况①。假设确定了  $X$  和  $Y$  的点在左上方(即该点在 3 个点中的  $-X_{\min} + Y_{\max}$  最小)，设另外两个点分别为  $(X_{\max}, Y)$  和  $(X, Y_{\min})$ 。我们维护一棵线段树，维护在  $X$  在  $i$  处时首先从下方往上方依次枚举每个点作为左上角，我们使用线段树维护所有  $(X, Y_{\min})$  节点的  $X_{\max} - Y_{\min}$  的最大值。每次枚举一个点，首先查询它  $(X_{\min}, +\infty)$  中的  $X_{\max} - Y_{\min}$  的最小值更新答案，然后将它作为可能的  $X_{\max}$  更新线段树在  $(-\infty, X_{\min})$  中的  $X_{\max} - Y_{\min}$ ，然后把自己作为可能的  $Y_{\min}$  更新线段树在这个点上的最大  $Y$  值，就可以完美解决情况①，时间复杂度  $O(N \log N)$ 。

对于情况②，我们枚举中间的点，然后计算四个方向上离它最近的节点，这个即为两个点求最近曼哈顿距离的情况。计算对角方向两个最近点的距离和并更新答案即可。时间复杂度仍为  $O(N \log N)$ 。

这题同样可以使用分治算法解决，时间复杂度仍为  $O(N \log N)$ 。