

Tree解题报告

长沙市雅礼中学 伍一鸣

Contents

1	问题简述	2
1.1	题目大意	2
1.2	数据规模	2
2	关键词	2
3	算法一	3
4	算法二	3
5	算法三	3
6	算法四	4

1 问题简述

1.1 题目大意

一棵 n 个点的树，每个点的初始权值为1。对于这棵树有 q 个操作，每个操作为以下四种操作之一：

- + $u\ v\ c$: 将 u 到 v 的路径上的点的权值都加上自然数 c ;
- $u_1\ u_2\ v_1\ v_2$: 将树中原有的边 (u_1, v_1) 删除，加入一条新边 (u_2, v_2) ，保证操作完之后仍然是一棵树；
- * $u\ v\ c$: 将 u 到 v 的路径上的点的权值都乘上自然数 c ;
- / $u\ v$: 询问 u 到 v 的路径上的点的权值和，求出答案对于51061的余数。

1.2 数据规模

10%的数据保证， $1 \leq n, q \leq 2000$

另外15%的数据保证， $1 \leq n, q \leq 5 * 10^4$ ，没有-操作，并且初始树为一条链

另外35%的数据保证， $1 \leq n, q \leq 5 * 10^4$ ，没有-操作

100%的数据保证， $1 \leq n, q \leq 10^5, 0 \leq c \leq 10^4$

2 关键词

动态树

3 算法一

对于每个操作都 $O(n)$ 的做一次。

时间复杂度： $O(n \cdot q)$

期望得分：10分

4 算法二

对于初始树为一条链，且无修改边操作的数据。这个问题相当于，对于排成一行的 n 个数字，有三种操作：将某一段都乘上一个数字，将某一段都加上一个数字，询问某一段的和。对于这个问题我可以用线段树来做：对于每个节点维护三个值： (a, b, sum) ，意义为将这一段的每个数字 x_i 都变成了 $a \cdot x_i + b$ 时的和为 sum 。

Trick:

- 标记的下传
- 需要给每个节点按照在链中的位置重标号

时间复杂度： $O(q \cdot \log n)$

期望得分：15分

5 算法三

对于无修改边操作的数据。这个问题可以利用路径剖分来做。将树按照轻重边剖分，对于每条重路径我们可以像算法二中说的那样用一棵线段树来维护，由轻重边剖分的性质可以知道每次操作最多用到 $O(\log n)$ 条重路径，对于每条重路径操作的时间是 $O(\log n)$ 的，所以对于每条操作我们可以在 $O(\log^2 n)$ 的时间内完成。

时间复杂度： $O(q \cdot \log^2 n)$

期望得分：50分

6 算法四

在没有 $-$ 操作的情况下，可以使用树链剖分或者Link-Cut-Trees直接做。这个部分相当简单，只要维护四个量即可 $(a, b, size, sum)$ 。表示将这一段长度为 $size$ 的数字从 x 变成 $a \cdot x + b$ 后的和为 sum 。现在的问题是 $-$ 操作，假设 $-$ 是在修改某个节点父亲，那么这个还是可以直接套用Link-Cut-Trees来做。现在的问题在于 $-$ 不是在修改某个节点父亲，这样可能会导致父亲孩子关系发生颠倒。假定我们定1号节点为根，然后我们断掉了 $(father_x, x)$ 这条边，然后从 x 所在的块内找了一个点 v ，在1所在的块内找了一个点 u ，加入了 (u, v) 这条边。因为我们规定了树的根必须是1，所以 x 所在的块内的某些点之间的父亲孩子关系会颠倒，稍加思考会发现只有从 v 到 x 这条链的父亲孩子关系颠倒了。

颠倒一个序列某一段的序也是可以用Splay在不改变复杂度的前提下实现：维护一个翻转标记 rev ，在访问到 p 的时候若 p 的 rev 为 $true$ ，则将 p 的左右孩子交换，同时将标记下传即可。

用改造之后的Link-Cut-Trees就可以解决这个问题了。关于Link-Cut-Trees不太清楚的同学可以去阅读一下范浩强神犇WC2012的课件或者是杨哲前辈在2007年的作业《QTREE解法的一些研究》。

时间复杂度: $O(q \cdot \log n)$

期望得分: 100分