黑白染色解题报告

【简要描述】

要把一张方格纸染成目标状态，一次可以染一个四连通块（无视颜色）变成黑色或者白色。问最少步数。

【分析与算法设计】

算法一：

随机染色，进行模拟，多次进行，取最优值，期望得分 0 分。

时间复杂度：O(模拟次数)

算法二：

对于 $n*m<=15$ 的 3 个点，我们可以通过状态压缩+记忆化搜索的方法来解决。我们可以用 $0\sim2^{15}$ 这些数把每种状态表示出来，表示每个位置的颜色是白色还是黑色。然后每次枚举一种染色方法。边界是终止状态的步数是 0。由于直接采用传统 dp 的方法可能会超时，所以这里采用记忆化搜索。期望得分 15 分。

时间复杂度：$O(3^{n*n})$

算法三：

对于 m=1 的 3 个点，我们只需要直接统计目标状态中有多少段连续的黑色格子即可。首先这样做肯定是合法的，因为我们一次可以把一段染成黑色。现在我们来证明一下为什么这样子是最优的。若两个染色操作有重叠但没有包含关系，比如(l1,r1)和(l2,r2)，l1<=l2，r1<=r2，首先这两次操作染的颜色必然不同色，同色的话只需要染一次(l1,r2)。然而不同色的话，这两次操作必然得到两段不同颜色，这样最多只需要两次操作(l1,r1)，(r1,r2)或者是(l1,l2)，(l2,r2)，这两种情况取哪一张视它们的染色顺序而定。如果(l1,r1)包含(l2,r2),这种情况也很简单，只需要执行(l1,l2)和(r1,r2)两次操作。所以这样我们就拿到了期望得分 15 分。配合前面得分就有 30 分了。

时间复杂度：O(n*m)

算法四：

首先我们建立这样一张无向图：对于每个格子我们视为一个顶点，在相邻的四个格子中，如果在目标图里它们的颜色一样，就连一条边权为 0 的边，若颜色不同就连一条边权为 1 的边。现在我们对于每个格子，以它为起点计算到其他点的最短路，我们找到离这个格子最远的黑色格子，若这个距离是 D，我们容易用贪心的思想构造一个长度为 D+1 的染色序列来达到目标：

1. 第一步把所有距离<=D 的格子染黑。
2. 第二步把所有距离<=D-1 的格子染白。
3. ……

D+1.把所有距离<=0 的格子染成对应颜色。

这样，我们只需要在所有格子中选一个以它作为起点，最远黑色格子距离最短的格子，那么它的 D+1 就是答案。

这样做的合法性是显然的，我们来证明这样做的最优性。

首先我们把所有距离为 0 的点压缩成一个点。注意如果我们如果给某些格子染色了的话，我们把这些格子距离为 0 的点一起染了结果不会有影响。

1. 我们可以证明任意方式的染色，总可以转变这样的形式：对于每一个染色操作所操作的连通块，它总是前一次操作的连通块的子集。这个是可以比较意识流的感觉出来的，多画几次就明白了。
2. 最后一次操作恰好只要染一个同色连通块。

因此，存在一个最优解是如上方式操作的。

时间复杂度：$O(n^2m^2)$